

Développement : Le lemme de MORSE

ANALYSE & PROBABILITÉS
ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE

Référence : [ROU] ROUVIÈRE F., *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation, quatrième édition revue et augmentée*, Cassini, 2003, p344.

Pour le lemme : p209 (mais c'est rappelé en p344, c'est l'exercice 66).

Pour les leçons :

- 148 : Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie. Rang. Exemples et applications.
- 157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.
- 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.
- 206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.
- 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.
- 215 : Applications différentiables sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Exemples et applications.
- 218 : Formules de TAYLOR. Exemples et applications.
- 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) est l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $E := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Lemme 1. Réduction des formes quadratiques.

Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \varphi(M) = {}^t M A_0 M.$$

Alors, il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 telle que :

$$\forall A \in V \quad A = {}^t \psi(A) A_0 \psi(A).$$

PREUVE : Pour $M \in E$, $\varphi(M)$ est polynomiale en les coefficients de M , donc φ est de classe \mathcal{C}^1 sur E . Pour $H \in E$ au voisinage de I_n , on a :

$$\begin{aligned} \varphi(I_n + H) &= {}^t (I_n + H) A_0 (I_n + H) \\ &= A_0 + A_0 H + {}^t H A_0 + {}^t H A_0 H \\ &= \varphi(I_n) + {}^t (A_0 H) + A_0 H + \underset{H \rightarrow 0}{o}(\|H\|), \end{aligned}$$

puisque, si $\|\cdot\|$ est une norme sur E sous-multiplicative, $\|{}^t H A_0 H\| \leq \|H\|^2 \|A_0\|$.
Donc $d\varphi(I_n) \cdot H = {}^t (A_0 H) + A_0 H$. En particulier, $d\varphi(I_n) \cdot H$ est symétrique.

On a :

$$\text{Ker}(d\varphi(I_n)) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0 H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\} = A_0^{-1} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),$$

et donc, comme A_0 est inversible :

$$\dim(\text{Ker}(d\varphi(I_n))) = \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

D'après le théorème du rang, $\text{rg}(d\varphi(I_n)) = \frac{n(n+1)}{2} = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$, avec $\text{Im}(d\varphi(I_n)) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent :

$$\text{Im}(d\varphi(I_n)) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),$$

et $d\varphi(I_n) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est surjective.

Remarque 2.

Autre argument possible pour montrer que $d\varphi(I_n) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est surjective : si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, en posant $H = \frac{1}{2} A_0^{-1} M$, on a $d\varphi(I_n) \cdot H = M$.

Maintenant, soit $F := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0 M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\} = A_0^{-1} \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Comme $A_0 \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker}(d\varphi(I_n)) \oplus F.$$

Donc F est un supplémentaire de $\text{Ker}(d\varphi(I_n))$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a de plus $I_n \in F$ et :

$$\text{Ker}(d\varphi|_F(I_n)) = \text{Ker}(d\varphi(I_n)) \cap F = \{0\}.$$

Ainsi, $d\varphi|_F$ est injective. Comme elle est surjective, $d\varphi|_F$ est un isomorphisme.

Cela permet d'appliquer le théorème d'inversion locale : il existe un voisinage ouvert U de I_n dans F (contenu dans $GL_n(\mathbb{R})$, quitte à le réduire) tel que $\varphi|_F : U \rightarrow V := \varphi|_F(U)$ soit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.

Or, V est un voisinage de $A_0 = \varphi|_F(I_n) = \varphi(I_n)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et :

$$\forall A \in V \quad \exists ! M = \varphi|_F^{-1}(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad A = {}^t M A_0 M.$$

On pose donc :

$$\psi = \varphi|_F^{-1},$$

et ψ est de classe \mathcal{C}^1 à valeurs dans $U \subset GL_n(\mathbb{R})$.

Cela achève la preuve. □

Théorème 3. Lemme de MORSE.

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0, et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^3 telle que $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ soit non dégénérée, de signature $(p, n - p)$.

Alors, il existe un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme $\varphi : W \rightarrow V$ entre deux voisinages de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $\varphi(0) = 0$ et :

$$\forall x \in W \quad f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^p \varphi_k(x)^2 - \sum_{k=p+1}^n \varphi_k(x)^2,$$

où les φ_k sont les fonctions coordonnées de φ dans la base canonique de \mathbb{R}^n .

PREUVE : Quitte à réduire U , on suppose que $U = \mathbb{D}(0, \varepsilon)$, avec $\varepsilon > 0$. En particulier, U est convexe.

On peut donc appliquer la formule de TAYLOR avec reste intégral à f à l'ordre deux :

$$\forall x \in U \quad f(x) = f(0) + \int_0^1 (1-t) d^2f(tx)(x, x) dt = {}^t x Q(x) x,$$

où $Q : x \mapsto \int_0^1 (1-t) d^2f(tx) dt$.

L'idée va être de transformer l'expression de Q (donc de f). Déjà, Q est de classe \mathcal{C}^1 sur U d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Remarque 4. Pourquoi Q est de classe \mathcal{C}^1 ?

Justifions cela rigoureusement (à ne pas mettre pendant le développement, c'est juste si le jury demande à détailler). Vérifions donc les hypothèses du théorème :

→ Pour $t \in [0, 1]$, $x \mapsto (1-t)d^2f(tx)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U par produit et composition de fonctions de classe \mathcal{C}^1 , puisque f est de classe \mathcal{C}^3 sur U .

→ Pour $x \in U$, $t \mapsto (1-t)d^2f(tx)$ est intégrable sur $[0, 1]$, car continue sur le segment $[0, 1]$.

→ Domination : On va le faire sur tout compact $K \subset U$. Soit donc $(t, x) \in [0, 1] \times K$, qui est un compact.

La fonction $g : (t, x) \mapsto (1-t)d^2f(tx)(x, x)$ est continue sur le compact $[0, 1] \times K$ par produit et composition de fonctions continues. Elle a donc un maximum sur $[0, 1] \times K$, qu'on peut noter κ , et :

$$\forall (t, x) \in [0, 1] \times K \quad |g(t, x)| \leq \kappa,$$

avec $t \mapsto \kappa$ qui est intégrable sur le segment $[0, 1]$.

Il reste à dominer $d_x g(t, \cdot)$, la différentielle de $g(t, \cdot)$ à $t \in [0, 1]$ fixé. Pour $(t, x) \in [0, 1] \times K$, on a :

$$g(t, x) = d^2f(tx)(x, x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx) t^2 x_i x_j,$$

$$\begin{aligned} d_x g(t, x) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_k}(t, x) dx_k \\ &= t^2 (1-t) \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n \left(t \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(tx) x_i x_j + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx) \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_i x_j) \right) \right) dx_k, \end{aligned}$$

$$\text{avec, pour } i, j, k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_i x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin \{i, j\} \\ 2x_k & \text{si } k = i = j \\ x_i & \text{si } k = i \neq j \\ x_j & \text{si } k = j \neq i \end{cases}.$$

Comme f est de classe \mathcal{C}^3 , l'expression de $d_x g(t, x)$, qui définit une fonction continue en (t, x) , peut être bornée uniformément en $(t, x) \in [0, 1] \times K$ par une constante κ' , avec $t \mapsto \kappa'$ qui est intégrable sur le segment $[0, 1]$.

Ceci permet d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

Par hypothèse, $Q(0) = \frac{1}{2}d^2f(0)$ est inversible, et elle est de plus symétrique (matrice hessienne symétrique, d'après le théorème de SCHWARZ).

D'après le lemme, il existe un voisinage V de 0 dans \mathbb{R}^n et une application $M : V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 tels que :

$$\forall x \in V \quad Q(x) = {}^t M(x)Q(0)M(x).$$

Remarque 5.

Si on veut rigoureusement appliquer le lemme, il nous donne en fait l'existence d'un voisinage V_0 de $Q(0)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi_0 : V_0 \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 tels que :

$$\forall A \in V_0 \quad A = {}^t \psi_0(A)Q(0)\psi_0(A_0).$$

Comme Q est continue en 0, il se trouve que $V := Q^{-1}(V_0)$ est un voisinage de 0. Cela permet d'écrire :

$$\forall x \in V \quad Q(x) = {}^t M(x)Q(0)M(x),$$

où $Q(x) = A$, et donc $M(x) := \psi_0(Q(x))$.

Soit $x \in V$. Il vient :

$$f(x) - f(0) = {}^t (M(x)x)Q(0)M(x)x.$$

Or, par hypothèse, $Q(0)$ est de signature $(p, n - p)$.

D'après le théorème d'inertie de SYLVESTER, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$Q(0) = {}^t PDP,$$

où $D = \begin{pmatrix} I_p & (0) \\ (0) & I_{n-p} \end{pmatrix}$ (matrice par blocs). D'où :

$$f(x) - f(0) = {}^t (PM(x)x)DPM(x)x.$$

En notant $\varphi : x \mapsto PM(x)x$ (définie sur V), on a que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur V par produit de fonctions de classe \mathcal{C}^1 , et $d\varphi(0) : h \mapsto PM(0)h$ est inversible d'inverse $h \mapsto M(0)^{-1}P^{-1}h$ (on rappelle que $M(0)$ et P sont inversibles).

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage W contenant 0 tel que φ soit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de W sur $\varphi(W)$, qu'on considère comme contenu dans V (quitte à le réduire).

Par conséquent, pour tout $x \in W$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= {}^t \varphi(x)D\varphi(x) \\ &= \sum_{k=1}^p \varphi_k(x)^2 - \sum_{k=p+1}^n \varphi_k(x)^2 \end{aligned}$$

après calcul matriciel, ce qui achève la preuve. □